Verschiebungs- und Drehvektorfeld einer Einzelkraft und eines Momentes im Cosseratschen Kontinuum

Kessel, S.

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 19, 1967, S. 72-83

Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Verschiebungs- und Drehvektorfeld einer Einzelkraft und eines Momentes im Cosseratschen Kontinuum

Von S. Kessel

Vorgelegt von H. Schaefer

(Eingegangen am 23. 11. 1966)

Übersicht: Mit Hilfe des vollständigen Spannungsfunktionenansatzes werden in einem unendlich ausgedehnten, elastisch isotropen Cosserat-Kontinuum das Verschiebungs- und das Drehvektorfeld einer Einzelkraft und eines Momentes berechnet und der Greensche Tensor der elastischen Grundgleichungen aufgestellt. Die sich ergebenden Abweichungen von den klassischen Lösungen klingen mit der Entfernung von der Lastsingularität ab.

Summary: Using the complete stress function solution, the displacement and rotation vector fields of a singular force and a couple in an infinitely extended, elastic isotropic Cosserat continuum are calculated. Also Green's tensor for the fundamental equations is derived. The deviations from the classical solutions decrease with growing distance from the singularity.

Vorbemerkungen

Wir rechnen in kartesischen Koordinaten und benutzen sowohl die Indizesschreibweise als auch eine symbolische Schreibweise für Vektoren und Tensoren. Über griechische Indizes ist von 1 bis 3 zu summieren.

Einleitung

Das Verschiebungsvektorfeld einer Einzelkraft im unendlich ausgedehnten, homogenen und elastisch-isotropen Kontinuum kann man mit Hilfe des Neuber-Papkovichschen [1] oder des Galerkinschen [2] Lösungsansatzes für die elastischen Grundgleichungen berechnen. Das Verschiebungsvektorfeld der singulären Belastung läßt sich aber auch bestimmen, wenn man von dem vollständigen Spannungsfunktionenansatz [3]:

$$\sigma_{(ik)} = e_{i\alpha\lambda} e_{k\beta\mu} \partial_\alpha \partial_\beta \psi_{(\lambda\mu)} + \partial_i \psi_k + \partial_k \psi_i - \delta_{ik} \partial_\varkappa \psi_\varkappa \tag{1}$$

ausgeht, der die Gleichgewichtsbedingungen

$$\partial_\varkappa \sigma_{(\varkappa k)} = -X_k \tag{2}$$

erfüllt, wenn

$$\Delta \psi_k = -X_k \tag{3}$$

gesetzt wird. Aus dem mit (1) gebildeten Deformationstensor

$$\varepsilon_{(ik)} = \frac{1}{2G}\left\{\frac{1}{2}\left[\partial_i(\partial_k\psi_{\varkappa\varkappa} - 2\partial_\varkappa\psi_{(\varkappa k)} + 2\psi_k) + \right.\right.$$
$$\left. + \partial_k(\partial_i\psi_{\varkappa\varkappa} - 2\partial_\varkappa\psi_{(\varkappa i)} + 2\psi_i)\right] +$$
$$\left. + \Delta\psi_{(ik)} + \frac{1}{1+\nu}\delta_{ik}(-\Delta\psi_{\alpha\alpha} + \partial_\alpha\partial_\beta\psi_{\alpha\beta} - \partial_\alpha\psi_\alpha)\right\} \tag{4}$$

folgt unter der Bedingung für den Spannungsfunktionentensor $\psi_{(ik)}$:

$$\Delta\psi_{(ik)} + \frac{1}{1+\nu}\delta_{ik}(-\Delta\psi_{\alpha\alpha} + \partial_\alpha\partial_\beta\psi_{\alpha\beta} - \partial_\alpha\psi_\alpha) = 0 \tag{5}$$

die Darstellung des Verschiebungsvektorfeldes:

$$u_i = \frac{1}{2G}(\partial_i\psi_{\varkappa\varkappa} - 2\partial_\varkappa\psi_{(\varkappa i)} + 2\psi_i). \tag{6}$$

Eine Partikularlösung von (5) erhalten wir, wenn wir

$$\psi_{(ik)} = \delta_{ik}\psi \tag{7}$$

setzen, wobei

$$\Delta\psi = -\frac{1}{1-\nu}\partial_\alpha\psi_\alpha \tag{8}$$

zu erfüllen ist.

Wenn wir annehmen, daß eine Einzelkraft $\boldsymbol{K}$ im Punkte mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{R}_0$ angreift, wird $X_k = K_k\delta(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}_0)$, wobei $\delta(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}_0)$ die Diracsche Deltafunktion ist, und

$$\psi_k = \frac{1}{4\pi}\frac{K_k}{r}; \qquad r = |\boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}_0|. \tag{9}$$

Aus (8) folgt dann

$$\psi = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)}\frac{\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}}{r}; \qquad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}_0 \tag{10}$$

und aus (6)

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)}\left[(3-4\nu)\frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{r}} + \frac{\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}}{r^3}\right] \tag{11}$$

die bekannte, im Kraftangriffspunkt singuläre Lösung der elastischen Grundgleichungen.

In seiner Arbeit über topologische Fragen in der Theorie der Spannungsfunktionen des klassischen Kontinuums hat *Rieder* [4] das Problem der Einzelkraft im unendlich ausgedehnten Kontinuum als Problem mit einer singulären Inkompatibilität formuliert und es mit dem Spannungsfunktionenansatz (1) *ohne* das Vektorfeld ψ_k gelöst.

Das Problem der Bestimmung des Verschiebungs- und des Drehvektorfeldes für eine Einzelkraft und ein Moment im unendlich ausgedehnten Cosseratschen Kontinuum kann ähnlich wie in der klassischen Theorie gelöst werden. Geht man aus von den elastischen Grundgleichungen für die kinematischen Felder, so lassen sich Lösungsansätze aufbauen, die den klassischen Ansätzen von *Neuber-Papkovich* und *Galerkin* entsprechen. Die verallgemeinerten Lösungsansätze für die inhomogenen elastischen Grundgleichungen wurden von *Mindlin* [5] und von *Sandru* [6] gefunden. Beide Autoren geben außerdem das Verschiebungs- und das Drehvektorfeld einer Einzelkraft und eines Momentes an. Im Gegensatz dazu wird in der vorliegenden Arbeit die vollständige Spannungsfunktionenlösung benutzt, um für ein elastisch isotropes Cosseratsches Kontinuum die kinematischen Vektorfelder und den Greenschen Tensor der elastischen Grundgleichungen zu berechnen.

Die Spannungsfunktionenlösung

Schaefer hat in [7] gezeigt, daß sich die Gleichgewichtsbedingungen des Cosseratschen Kontinuums [8]

$$\begin{aligned} \partial_\varkappa \sigma_{\varkappa k} &= -X_k, \\ \partial_\varkappa \mu_{\varkappa k} + e_{k\varkappa\beta}\sigma_{\varkappa\beta} &= -Y_k, \end{aligned} \tag{12}$$

wobei σ_{ik} der Kraftspannungstensor, μ_{ik} der Momentenspannungstensor X_k die Volumenkraft und Y_k das Volumenmoment ist, durch den Ansatz

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} &= \partial_i\partial_\varkappa F_{\varkappa k} - \Delta F_{ik} + \partial_i S_k, \\ \mu_{ik} &= \partial_i\partial_\varkappa G_{\varkappa k} - \Delta G_{ik} + \partial_i T_k + \partial_i e_{k\varkappa\beta} F_{\varkappa\beta} + e_{ik\beta}\partial_\varkappa F_{\varkappa\beta} + e_{ik\varkappa} S_\varkappa \end{aligned} \tag{13}$$

erfüllen lassen, wenn

$$\Delta S_k = -X_k, \quad \Delta T_k = -Y_k \tag{14}$$

gesetzt wird. Die Spannungsfunktionstensoren 2. Ordnung F_{ik} und G_{ik} sind dann so zu bestimmen, daß der Ansatz (13) verträglich wird. Führt man im Stoffgesetz [9]

$$\begin{aligned} \varkappa_{ik} &= \frac{1}{2GL^2}\left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{c_2}\right)\mu_{ik} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{c_2}\right)\mu_{ki} - \frac{c_3}{1+3c_3}\,\delta_{ik}\mu_{\varkappa\varkappa}\right], \\ \gamma_{ik} &= \frac{1}{2G}\left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{c_1}\right)\sigma_{ik} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{c_1}\right)\sigma_{ki} - \frac{\nu}{1+\nu}\,\delta_{ik}\sigma_{\varkappa\varkappa}\right], \end{aligned} \tag{15}$$

wobei

$$\begin{aligned} \varkappa_{ik} &= \partial_i \Phi_k, \\ \gamma_{ik} &= \partial_i u_k - e_{ik\varkappa}\Phi_\varkappa \end{aligned} \tag{16}$$

die Deformationstensoren des Cosseratschen Kontinuums sind, die Spannungsfunktionendarstellung der Gleichgewichtsspannungen ein, so erhält man unter den Bedingungen:

$$\Delta G_{(ik)} + \frac{c_3}{1+3c_3}\delta_{ik}\left(-\Delta G_{\alpha\alpha} + \partial_\alpha\partial_\beta G_{(\alpha\beta)} + 2\partial_\alpha F_\alpha + \partial_\alpha T_\alpha\right) = 0, \tag{17a}$$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{c_2}\right)\left(e_{i\varkappa\beta}\,\partial_\varkappa\,\partial_\gamma\,G_{(\gamma\beta)} - \partial_i\,\partial_\varkappa\,G_\varkappa + e_{i\varkappa\beta}\,\partial_\varkappa\,T_\beta\right) + \\ &+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{c_2}\right)\Delta G_i - \frac{2}{c_2}\left(\partial_\varkappa F_{(\varkappa i)} + S_i\right) - e_{i\varkappa\beta}\partial_\varkappa F_\gamma = 0,\end{aligned} \tag{17b}$$

$$\Delta F_{(ik)} + \frac{\nu}{1+\nu}\delta_{ik}\left(-\Delta F_{\alpha\alpha} + \partial_\alpha\partial_\beta F_{(\alpha\beta)} + \partial_\alpha S_\alpha\right) = 0, \tag{17c}$$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{c_1}\right)\left(e_{i\varkappa\beta}\partial_\varkappa\partial_\gamma F_{(\gamma\beta)} - \partial_i\partial_\varkappa F_\varkappa + e_{i\varkappa\beta}\partial_\varkappa S_\beta\right) + \\ &+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{c_1}\right)\Delta F_i - \frac{1}{L^2}\left(\partial_\varkappa\,G_{(\varkappa i)} + 2\,F_i + T_i - e_{i\varkappa\beta}\,\partial_\varkappa\,G_\beta\right) = 0,\end{aligned} \tag{17d}$$

für die Spannungsfunktionen, die Darstellung des Verschiebungs- und des Drehvektorfeldes [10]:

$$\begin{aligned}u_i &= \frac{1}{2\,G}\left(\partial_\varkappa\,F_{\varkappa i} + S_i\right),\\ \Phi_i &= \frac{1}{2\,G L^2}\left(\partial_\varkappa G_{\varkappa i} + 2F_i + T_i\right).\end{aligned} \tag{18}$$

Dabei ist die Zerlegung der Spannungsfunktionstensoren in ihre symmetrischen und schiefsymmetrischen Anteile benutzt worden:

$$\begin{aligned}F_{ik} &= F_{(ik)} + e_{ik\varkappa}F_\varkappa,\\ G_{ik} &= G_{(ik)} + e_{ik\varkappa}G_\varkappa.\end{aligned} \tag{19}$$

In den Bedingungsgleichungen (17) sind die Vektorfelder $\boldsymbol{S}$ und $\boldsymbol{T}$ als bekannt anzusehen; geeignet zu bestimmen sind die Spannungsfunktionen $F_{(ik)}$, F_i, $G_{(ik)}$ und G_i. Da bei der singulären Belastung die kinematischen Vektorfelder und die Spannungen mit wachsender Entfernung von der Singularität abklingen, dürfen wir annehmen, daß die Spannungsfunktionen nur eine Singularität in der Lastangriffsstelle haben und im Unendlichen verschwinden. Beachten wir das bei den Lösungsansätzen für die Gleichungen (17), so brauchen wir Lösungen von Laplace- und homogenen Helmholtz-Gleichungen nicht zu berücksichtigen, denn die überall regulären und im Unendlichen verschwindenden Lösungen dieser Gleichungen sind identisch Null. Wir können also statt des Lösungsansatzes für Gl. (17c):

$$F_{(ik)} = f_{(ik)} + \delta_{ik} f$$

mit

$$\Delta f_{(ik)} = 0$$

den einfacheren Ansatz

$$F_{(ik)} = \delta_{ik} f \tag{20}$$

wählen. Die Gl.(17c) wird mit (20) erfüllt, wenn wir

$$\Delta f = -\frac{\nu}{1-\nu}\,\partial_\alpha S_\alpha \tag{21}$$

setzen. Nur die Partikularlösung dieser Gleichung ist zu bestimmen.

Aus Gl. (17a) folgt mit Hilfe ihrer Spur:

$$\Delta\left(G_{(ik)} - \frac{1}{3}\,\delta_{ik}\,G_{\varkappa\varkappa}\right) = 0\,. \tag{22}$$

Der Ansatz

$$G_{(ik)} = \delta_{ik}\, g \tag{23}$$

mit einer vorläufig noch beliebigen Funktion g, löst diese Gleichung identisch. Gl. (17a) wird erfüllt, wenn wir setzen:

$$F_i = -\frac{1+c_3}{2c_3}\,\partial_i g - \frac{1}{2}\,T_i + e_{i\varkappa\beta}\,\partial_\varkappa A_\beta \tag{24}$$

mit einem noch willkürlichen Vektorfeld A_i.

Wir bilden die Divergenz der Vektorgleichung (17b) und erhalten mit (24) die Differentialgleichung für g:

$$\Delta g - \frac{1}{l_2^2}\,g = -\frac{c_3}{1+c_3}\,\partial_\alpha T_\alpha, \quad l_2^2 = \frac{L^2(1+c_3)}{c_1}\,. \tag{25}$$

Die Gl. (17b) läßt sich nun mit

$$G_i = 2A_i + L^2\,\frac{2-c_1}{2c_1}\,S_i - L^2\,\frac{2+c_1}{2c_1}\left(\Delta A_i + \frac{1}{2}\,e_{i\varkappa\beta}\,\partial_\varkappa T_\beta\right) + \partial_i \varrho \tag{26}$$

erfüllen, wobei ϱ noch zu bestimmen ist.

Schließlich erhalten wir aus Gl. (17d) für A_i die Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \Delta(A_i - l_1^2\,\Delta A_i) = S_i - \frac{2-c_1}{2+c_1}\,l_1^2\,\Delta S_i + \\ + \frac{1}{2}\,e_{i\varkappa\beta}\,\partial_\varkappa T_\beta + l_1^2\,\frac{1}{2}\,e_{i\varkappa\beta}\,\partial_\varkappa \Delta T_\beta: \quad l_1^2 = \frac{L^2(2+c_1)(2+c_2)}{8c_1} \end{aligned} \tag{27}$$

und außerdem:

$$\Delta\varrho = f - \partial_\alpha A_\alpha + L^2\,\frac{(2+c_1)(2-c_2)}{8c_1}\,\partial_\alpha \Delta A_\alpha - L^2\,\frac{(2-c_1)(c_2-2)}{8c_1}\,\partial_\alpha S_\alpha\,. \tag{28}$$

Man kann leicht anhand der Formeln (18) nachprüfen, daß ϱ für die Berechnung der Vektorfelder $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{\Phi}$ nicht benötigt wird.

Die Berechnung der Spannungsfunktionen für eine Einzelkraft und ein Moment

Der Punkt $\boldsymbol{R}_0$ eines unendlich ausgedehnten Cosserat-Kontinuums sei der Angriffspunkt einer Einzelkraft $\boldsymbol{K}$ und eines Momentes $\boldsymbol{M}$. Mit der Diracschen Deltafunktion $\delta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_0)$ können wir also die Volumenkraft $\boldsymbol{X}$ und das Volumenmoment $\boldsymbol{Y}$ schreiben:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X} &= \boldsymbol{K}\delta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_0), \\ \boldsymbol{Y} &= \boldsymbol{M}\delta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_0). \end{aligned} \tag{29}$$

Die Lösungen der Differentialgleichungen (14) lauten dann:

$$\boxed{\boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{K}}{4\pi}\frac{1}{r}} \qquad \boxed{\boldsymbol{T} = \frac{\boldsymbol{M}}{4\pi}\frac{1}{r}} \tag{30}$$

wobei $r = |\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_0| = \sqrt{(x_1-\mathring{x}_1)^2+(x_2-\mathring{x}_2)^2+(x_3-\mathring{x}_3)^2}$ ist.

Wegen

$$\Delta\left(\frac{r}{2}\right) = \frac{1}{r}$$

wird (21):

$$\Delta f = -\frac{\nu}{1-\nu}\partial_\alpha \frac{K_\alpha}{4\pi}\frac{1}{r} = -\Delta\frac{\nu}{8\pi(1-\nu)}K_\alpha\,\partial_\alpha r \tag{31}$$

also:

$$\boxed{f = -\frac{\nu}{8\pi(1-\nu)}\frac{\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}}{r}}, \qquad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_0\,. \tag{32}$$

Mit (30) lautet die Differentialgleichung (25):

$$\Delta g - \frac{1}{l_2^2}g = -\frac{c_3}{1+c_3}\frac{M_\alpha}{4\pi}\partial_\alpha\left(\frac{1}{r}\right). \tag{33}$$

Wir setzen

$$g = \frac{c_3}{4\pi(1+c_3)}M_\alpha\,\partial_\alpha\,g^* \tag{34}$$

und erhalten für g^* die Differentialgleichung:

$$\Delta g^* - \frac{1}{l_2^2}g^* = -\frac{1}{r}, \tag{35}$$

die wir mit dem Lösungsansatz

$$g^* = l_2^2\frac{1}{r} + g^{**} \tag{36}$$

wegen $\Delta(1/r) = -4\pi\delta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_0)$ in die Differentialgleichung

$$\Delta g^{**} - \frac{1}{l_2^2}\, g^{**} = 4\,\pi\, l_2^2\, \delta\,(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_0) \tag{37}$$

überführen können. Die für $r \to \infty$ verschwindende Lösung dieser Gleichung lautet:

$$g^{**} = -\, l_2^2\, \frac{1}{r}\; e^{-\frac{r}{l_2}}\,. \tag{38}$$

Mit (36) und (34) erhalten wir dann:

$$\boxed{g = \frac{L^2 c_3}{4\pi\, c_1}\, \frac{\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\left[-1 + \left(1+\frac{r}{l_2}\right) \mathrm{e}^{-\frac{r}{l_2}}\right]} \tag{39}$$

Wegen

$$\boldsymbol{S} = \Delta\left(\frac{1}{8\,\pi}\,\boldsymbol{K}\, r\right), \qquad \boldsymbol{T} = \Delta\left(\frac{1}{8\pi}\,\boldsymbol{M}\, r\right) \tag{40}$$

kann die Differentialgleichung (27) geschrieben werden:

$$\begin{aligned}\Delta(\boldsymbol{A} - l_1^2\,\Delta\,\boldsymbol{A}) = \Delta\Bigg[&\frac{1}{8\,\pi}\,\boldsymbol{K} r - \frac{2-c_1}{4\,\pi(2+c_1)}\, l_1^2\, \frac{\boldsymbol{K}}{r} + \\ &+ \frac{1}{16\,\pi}\operatorname{rot}\,(\boldsymbol{M} r) + \frac{l_1^2}{8\,\pi}\operatorname{rot}\left(\frac{\boldsymbol{M}}{r}\right)\Bigg]\end{aligned} \tag{41}$$

Daraus folgt:

$$\Delta\boldsymbol{A} - \frac{1}{l_1^2}\,\boldsymbol{A} = -\frac{1}{8\,\pi\, l_1^2}\,\boldsymbol{K} r - \frac{1}{16\,\pi l_1^2}\operatorname{rot}\,(\boldsymbol{M} r) - \frac{1}{8\,\pi}\operatorname{rot}\left(\frac{\boldsymbol{M}}{r}\right) + \frac{2-c_1}{4\,\pi(2+c_1)}\,\frac{\boldsymbol{K}}{r}. \tag{42}$$

Wir setzen

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{(1)} + \boldsymbol{A}^{(2)} + \boldsymbol{A}^{(3)} + \boldsymbol{A}^{(4)} \tag{43}$$

mit

$$\Delta\boldsymbol{A}^{(1)} - \frac{1}{l_1^2}\,\boldsymbol{A}^{(1)} = -\frac{1}{8\,\pi\, l_1^2}\,\boldsymbol{K} r\,, \tag{44a}$$

$$\Delta\boldsymbol{A}^{(2)} - \frac{1}{l_1^2}\,\boldsymbol{A}^{(2)} = -\frac{1}{16\,\pi\, l_1^2}\operatorname{rot}\,(\boldsymbol{M} r), \tag{44b}$$

$$\Delta\boldsymbol{A}^{(3)} - \frac{1}{l_1^2}\,\boldsymbol{A}^{(3)} = -\frac{1}{8\,\pi}\operatorname{rot}\left(\frac{\boldsymbol{M}}{r}\right), \tag{44c}$$

$$\Delta\boldsymbol{A}^{(4)} - \frac{1}{l_1^2}\,\boldsymbol{A}^{(4)} = \frac{2-c_1}{4\,\pi(2+c_1)}\,\frac{\boldsymbol{K}}{r}\,. \tag{44d}$$

Als Lösungsansatz für (44a) wählen wir:

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \frac{1}{8\,\pi}\,\boldsymbol{K} a^{(1)}\,. \tag{45}$$

Für $a^{(1)}$ folgt damit die Differentialgleichung:

$$\Delta a^{(1)} - \frac{1}{l_1^2}\,a^{(1)} = -\,\frac{1}{l_1^2}\,r\,. \tag{46}$$

Mit

$$a^{(1)} = r + a^{(1)*} \tag{47}$$

wird

$$\Delta a^{(1)*} - \frac{1}{l_1^2}\,a^{(1)*} = -\,\frac{2}{r} \tag{48}$$

und mit

$$a^{(1)*} = 2 l_1^2\,\frac{1}{r} + a^{(1)**} \tag{49}$$

erhalten wir schließlich:

$$\Delta a^{(1)**} - \frac{1}{l_1^2}\,a^{(1)**} = 2 l_1^2\, 4\,\pi\,\delta(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}_0)\,. \tag{50}$$

Da

$$a^{(1)**} = -2 l_1^2\,\frac{1}{r}\;\mathrm{e}^{-\frac{r}{l_1}} \tag{51}$$

ist, wird

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \frac{1}{8\,\pi}\,\boldsymbol{K}\left[r + \frac{2\,l_1^2}{r}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{r}{l_1}}\right)\right]. \tag{52}$$

In Gl. (44b) setzen wir

$$\boldsymbol{A}^{(2)} = \frac{1}{16\pi}\,\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{M} a^{(2)}) \tag{53}$$

und erhalten:

$$\Delta a^{(2)} - \frac{1}{l_1^2}\,a^{(2)} = -\,\frac{1}{l_1^2}\,r. \tag{54}$$

Demnach wird $a^{(2)} = a^{(1)}$ und

$$\boldsymbol{A}^{(2)} = \frac{1}{16\,\pi}\,\mathrm{rot}\left\{\boldsymbol{M}\left[r + \frac{2\,l_1^2}{r}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{r}{l_1}}\right)\right]\right\}. \tag{55}$$

Für Gl. (44c) wählen wir den Lösungsansatz:

$$\boldsymbol{A}^{(3)} = \frac{1}{8\pi} \operatorname{rot} (\boldsymbol{M} a^{(3)}) \tag{56}$$

und erhalten:

$$\Delta a^{(3)} - \frac{1}{l_1^2} a^{(3)} = -\frac{1}{r}\,. \tag{57}$$

Mit

$$a^{(3)} = \frac{l_1^2}{r} + a^{(3)*} \tag{58}$$

wird

$$\Delta a^{(3)*} - \frac{1}{l_1^2} a^{(3)*} = 4\pi\, l_1^2\, \delta(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}_0)\,, \tag{59}$$

und

$$a^{(3)*} = -l_1^2 \frac{1}{r}\, \mathrm{e}^{-\frac{r}{l_1}}\,, \tag{60}$$

also

$$\boldsymbol{A}^{(3)} = \frac{l_1^2}{8\pi} \operatorname{rot} \left[\boldsymbol{M} \frac{1}{r} \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{r}{l_1}}\right)\right]. \tag{61}$$

Setzen wir in Gl. (44d)

$$\boldsymbol{A}^{(4)} = \frac{2 - c_1}{4\pi(2 + c_1)} \boldsymbol{K} a^{(4)}, \tag{62}$$

so wird

$$\Delta a^{(4)} - \frac{1}{l_1^2} a^{(4)} = \frac{1}{r} \tag{63}$$

und wegen

$$a^{(4)} = -l_1^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\, \mathrm{e}^{-\frac{r}{l_1}}\right), \tag{64}$$

$$\boldsymbol{A}^{(4)} = -\frac{2 - c_1}{4\pi(2 + c_1)}\, l_1^2\, \boldsymbol{K} \frac{1}{r} \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{r}{l_1}}\right). \tag{65}$$

Der Gl. (43) entsprechend zusammengefaßt ergibt sich nach einigen Umformungen:

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{A} = {} & \frac{1}{8\pi} \boldsymbol{K} r + \frac{1}{16\pi} \frac{\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{M}}{r} + \\ & + \frac{c_1 l_1^2}{2\pi(2 + c_1)} \frac{\boldsymbol{K}}{r} \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{r}{l_1}}\right) + \frac{l_1^2}{4\pi} \frac{\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{M}}{r^3} \left[-1 + \left(1 + \frac{r}{l_1}\right) \mathrm{e}^{-\frac{r}{l_1}}\right] \end{aligned}} \tag{66}$$

Die Berechnung des Verschiebungs- und des Drehvektorfeldes

Aus der Darstellung (18) des Verschiebungsvektorfeldes $\boldsymbol{u}$ und des Drehvektorfeldes $\boldsymbol{\Phi}$ folgt mit den Ergebnissen des ersten Abschnittes:

$$u_i = \frac{1}{2G}\left(\partial_i f + \Delta A_i - \partial_i \partial_\varkappa A_\beta + S_i + \frac{1}{2}\, e_{i\varkappa\beta}\, \partial_\varkappa T_\beta\right), \tag{67}$$

$$\Phi_i = \frac{1}{2GL^2}\left[-\frac{1}{c_3}\partial_i g + L^2 \frac{2+c_1}{2c_1}\left(e_{i\varkappa\beta}\,\partial_\varkappa \Delta A_\beta + \frac{1}{2}\,\partial_i \partial_\varkappa T_\beta\right) - L^2 \frac{2-c_1}{2c_1}\, e_{i\varkappa\beta}\,\partial_\varkappa S_\beta\right]. \tag{68}$$

Wir setzen in diese Gleichungen die Ergebnisse (30), (32), (39) und (66) ein und erhalten nach einer elementaren, aber langwierigen Zwischenrechnung:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} = \frac{1}{16\pi G}\Biggl\{&\frac{3-4\nu}{1-\nu}\,\frac{\boldsymbol{K}}{r}\left[1 + \frac{4c_1(1-\nu)}{(2+c_1)\,(3-4\nu)}\left(\frac{l_1}{r}\right)^2\left(1 - h_2\left(\frac{r}{l_1}\right)\right)\right] + \\ &+ \frac{1}{1-\nu}\,\frac{\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{r}}{r^3}\left[1 - \frac{12c_1(1-\nu)}{2+c_1}\left(\frac{l_1}{r}\right)^2\left(1 - h_3\left(\frac{r}{l_1}\right)\right)\right] + \\ &+ 2\,\frac{\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{r}}{r^3}\left(1 - h_1\left(\frac{r}{l_1}\right)\right)\Biggr\},\end{aligned} \tag{69}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi} = \frac{1}{16\pi G}\Biggl\{&2\,\frac{\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{r}}{r^3}\left(1 - h_1\left(\frac{r}{l_1}\right)\right) - \\ &- \frac{\boldsymbol{M}}{r^3}\left[1 + \frac{2}{c_1}\,h_1\left(\frac{r}{l_2}\right) - \frac{2+c_1}{c_1}\,h_2\left(\frac{r}{l_1}\right)\right] + \\ &+ 3\,\frac{\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{r}}{r^5}\left[1 + \frac{2}{c_1}\,h_3\left(\frac{r}{l_2}\right) - \frac{2+c_1}{c_1}\,h_3\left(\frac{r}{l_1}\right)\right]\Biggr\},\end{aligned} \tag{70}$$

wobei wir die Abkürzungen

$$h_1\left(\frac{r}{l}\right) = \left(1 + \frac{r}{l}\right) e^{-\frac{r}{l}} \qquad h_2\left(\frac{r}{l}\right) = \left(1 + \frac{r}{l} + \frac{r^2}{l^2}\right) e^{-\frac{r}{l}}$$
$$h_3\left(\frac{r}{l}\right) = \left(1 + \frac{r}{l} + \frac{1}{3}\,\frac{r^2}{l^2}\right) e^{-\frac{r}{l}} \tag{71}$$

eingeführt haben. Die r/l-Abhängigkeit dieser Funktionen ist in Abb. 1 dargestellt.

Der Übergang zur klassischen Elastizitätstheorie mit $L = 0$, $h_1 = h_2 = h_3 = 0$ führt auf die bekannten singulären Lösungen für eine Einzelkraft und ein Moment:

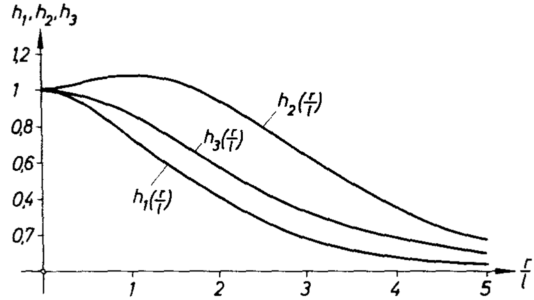

Abb. 1

Einzelkraft: ($\boldsymbol{K} \neq 0$, $\boldsymbol{M} = 0$)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}^* &= \frac{1}{16\pi G(1-\nu)}\left[(3-4\nu)\frac{\boldsymbol{K}}{r} + \frac{\boldsymbol{rr}\cdot\boldsymbol{K}}{r^3}\right], \\ \boldsymbol{\Phi}^* &= \frac{1}{2}\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^* = \frac{1}{8\pi G}\frac{\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{r}}{r^3}\,; \end{aligned} \tag{72}$$

Moment: ($\boldsymbol{K} = 0$, $\boldsymbol{M} \neq 0$)

$$\boldsymbol{u}^{**} = \frac{1}{8\pi G}\frac{\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{r}}{r^3}, \quad \boldsymbol{\Phi}^{**} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\boldsymbol{u}^{**} = -\frac{1}{16\pi G}\left(\frac{\boldsymbol{M}}{r^3} - 3\frac{\boldsymbol{rr}\cdot\boldsymbol{M}}{r^5}\right). \tag{73}$$

Vergleicht man nun diese klassischen Lösungen mit den obigen Ergebnissen für das *Cosserat*sche Kontinuum, so stellt man fest, daß die Abweichungen von den klassischenLösungen für $(r/l) \gg 1$ abklingen, und zwar in $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{K})$ wie $(r/l)^{-2}$ und in $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{M})$, $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{K})$ und $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{M})$ exponentiell.

Der *Green*sche Tensor der elastischen Grundgleichungen

Die Lösungen (69) und (70) lassen sich zusammenfassen:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{\Phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{G}^{(1)} & \underline{G}^{(2)} \\ \underline{G}^{(2)} & \underline{G}^{(3)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{K} \\ \boldsymbol{M} \end{pmatrix}.$$

Dabei sind die Tensoren $\underline{G}^{(i)}$ folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} \underline{G}^{(1)} &= \frac{1}{16\pi G}\left\{\left[\frac{3-4\nu}{1-\nu}\frac{1}{r} + \frac{4c_1}{2+c_1}\frac{l_1^2}{r^3}\left(1 - h_2\left(\frac{r}{l_1}\right)\right)\right]\underline{E} + \right. \\ &\qquad \left. + \left[\frac{1}{1-\nu}\frac{1}{r^3} - \frac{12c_1}{2+c_1}\frac{l_1^2}{r^5}\left(1 - h_3\left(\frac{r}{l_1}\right)\right)\right]\boldsymbol{rr}\right\}, \\ \underline{G}^{(2)} &= \frac{1}{8\pi G}\left[-\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3}h_1\left(\frac{r}{l_1}\right)\right]\boldsymbol{r}\times\underline{E}, \\ \underline{G}^{(3)} &= \frac{1}{16\pi G}\left\{\left[-\frac{1}{r^3} - \frac{2}{r^3 c_1}h_1\left(\frac{r}{l_2}\right) + \frac{2+c_1}{r^3 c_1}h_2\left(\frac{r}{l_1}\right)\right]\underline{E} + \right. \\ &\qquad \left. + \left[\frac{3}{r^5} + \frac{6}{r^5 c_1}h_3\left(\frac{r}{l_2}\right) - \frac{3(2+c_1)}{r^5 c_1}h_3\left(\frac{r}{l_1}\right)\right]\boldsymbol{rr}\right\}; \end{aligned} \tag{75}$$

$\underline{E}$ ist der Einheitstensor.

Der in (74) eingeführte Tensor

$$\underline{G} = \begin{pmatrix} \underline{G}^{(1)} & \underline{G}^{(2)} \\ \underline{G}^{(2)} & \underline{G}^{(3)} \end{pmatrix}$$

ist der *Green*sche Tensor für das inhomogene partielle Differentialgleichungssystem der elastischen Grundgleichungen des *Cosserat*schen Kontinuums

$$\mathfrak{L}\begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{\Phi} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} \end{pmatrix}, \tag{76}$$

oder ausführlicher

$$G\left[\left(1+\frac{c_1}{2}\right)\Delta\,\boldsymbol{u} + \left(1-\frac{c_1}{2}+\frac{2\nu}{1-2\nu}\right)\text{grad div}\,\boldsymbol{u} + c_1\,\text{rot}\,\boldsymbol{\Phi}\right] = -\boldsymbol{X}, \tag{77}$$

$$G\left[c_1\,\text{rot}\,\boldsymbol{u} + L^2\left(1+\frac{c_2}{2}\right)\Delta\boldsymbol{\Phi} + L^2\left(1-\frac{c_2}{2}+2c_3\right)\text{grad div}\,\boldsymbol{\Phi} - 2c_1\boldsymbol{\Phi}\right] = -\boldsymbol{Y}$$

Im unendlich ausgedehnten Kontinuum können wir die Lösungen dieses Differentialgleichungssystems schreiben:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{\Phi} \end{pmatrix} = \int\int\int \underline{G}(x_1, x_2, x_3; \xi_1, \xi_2, \xi_3) \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ \boldsymbol{Y}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \end{pmatrix} \mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2\,\mathrm{d}\xi_3, \tag{78}$$

wobei in (75)

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x_1 - \xi_1 \\ x_2 - \xi_2 \\ x_3 - \xi_3 \end{pmatrix}, \tag{79}$$

$$r = \sqrt{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 + (x_3-\xi_3)^2}$$

zu setzen ist.

Literatur

[1] *A. I. Lurje:* Räumliche Probleme der Elastizitätstheorie. Akademie-Verlag, Berlin (1963).

[2] *C. E. Pearson:* Theoretical Elasticity. Harvard University Press (1959).

[3] *H. Schaefer:* Die Spannungsfunktionen des dreidimensionalen Kontinuums und des elastischen Körpers. ZAMM, **33** (1953).

[4] *G. Rieder:* Topologische Fragen in der Theorie der Spannungsfunktionen. Abhdlg. d. Brschwg. Wiss. Ges. XII (1960).

[5] *R. D. Mindlin:* Stress Functions for a Cosserat Continuum. Int. J. Solids Structures, Vol. 1 (1965).

[6] *N. Sandru:* On some Problems of the Linear Theory of the Asymmetric Elasticity. Int. J. Engng. Sci., Vol. 4 (1966).

[7] *H. Schaefer:* Die Spannungsfunktionen eines Kontinuums mit Momentenspannungen. Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Vol. XV, 1 (1967).

[8] *W. Günther:* Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums. Abhdlg. d. Brschwg. Wiss. Ges. X (1958).

[9] *S. Kessel:* Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-Kontinuums. Abhdlg. d. Brschwg. Wiss. Ges. XVI (1964).

[10] *S. Kessel:* Die Spannungsfunktionen des Cosseratschen Kontinuums. ZAMM. Bd. 47 (1967).